

Лекция 1.

Литература:

1. Жикайдо Э. Выпуклая структура и методы экономического анализа
2. Акимов С.А. Введение в мат. экономику
3. Эланд Н. Элементы мат. экономики
4. Ойен М.-Т. Немецкой анализ и его эконом. приложения
5. Ойен М.-Т., Шаманин А.А. Экономическая интерпретация двойственности в задачах ЛП
6. Работка А.В., Шаманин А.А. Элементы фин. математики.

Мурен Э. Теория игр с приложениями из МЭ

Глава 1. Модели межотраслевого баланса и теория неотрицательных матриц

§1. Модель межотраслевого баланса В.В. Леонтьева

Пусть есть n отраслей

$X_i(t)$ - кол-во продукции (объём) в М.В. t отрасли

$Z_{ij}(t)$ - поставки продукции i -й отрасли в j -ю отрасль в период времени t

$w_i(t)$ - конечное потребление продукции i -й отрасли в период времени t

$$X_i(t) = \sum_{j=1}^n Z_{ij}(t) + w_i(t) \quad i = \overline{1, n} \quad \text{вектор баланса выпуска}$$

Леонтьев изучал:

$$\{X_i(t), Z_{ij}(t) \mid i, j = \overline{1, n}; t = \overline{1, T}\}$$

$$\frac{Z_{ij}(t)}{X_i(t)} \approx a_{ij} \quad \text{затраты } i\text{-й отрасли на отрасль } j$$

основная гипотеза Леонтьева

$\vec{x} = (x_1, \dots, x_n)$ - вектор объёмов произ-ва i -й отрасли

$\vec{w} = (w_1, \dots, w_n)$ - вектор конечных выпусков

$$\vec{x} = A \vec{x} + \vec{w} \quad \text{стат. модель Леонтьева} \quad \text{где } A = \|a_{ij}\|_{i,j=1}^n \geq 0$$

$$A \geq 0 \Leftrightarrow a_{ij} \geq 0 \quad i, j = \overline{1, n}$$

$$\vec{x} = (x_1, \dots, x_n) \geq 0 \Leftrightarrow x_i \geq 0 \quad i = \overline{1, n}$$

$$\vec{w} = (w_1, \dots, w_n) > 0 \Leftrightarrow w_i > 0 \quad i = \overline{1, n}$$

$$\vec{x} = A\vec{x} + \vec{w}$$

$\vec{x} \geq 0, \vec{w} > 0$ — верно только при таком условии

$$A = \|a_{ij}\|_{i,j=1}^n$$

Опр. Будем говорить, что неотриц. матрица является продуктивной, если $\exists \vec{x} \geq 0$ такой, что

$$\vec{w} = \vec{x} - A\vec{x} > 0$$

Простейшая динамическая модель Леонтьева

$$\vec{x}(t) = A\vec{x}(t+1) + \vec{w}(t+1)$$

постоянные
процессы

$$\vec{x}(t) \geq 0 \quad t = 1, 2, \dots$$

$$\vec{w}(t) > 0 \quad t = 1, 2, \dots$$

Решение системы роста: $\vec{x}(t) = S^t \vec{x}^1 \quad \vec{x}^1 \geq 0 \quad t = 1, 2, \dots$

$$\vec{w}(t) = S^t \vec{w}^1 \quad \vec{w}^1 > 0 \quad t = 1, 2, \dots$$

S-теден ^{стандарт} роста ($S > 1$ — рост; $S < 1$ — деградация)

$$S^t \vec{x}^1 = S^{t+1} A \vec{x}^1 + S^{t+1} \vec{w}^1 \quad / : S^{t+1}$$

$$\frac{1}{S} \vec{x}^1 = A \vec{x}^1 + \vec{w}^1$$

$$\vec{x}^1 \geq 0, \vec{w}^1 > 0$$

$$\text{Введем м-цу } D = (\frac{1}{S} E - A)$$

$$D \vec{x}^1 = \vec{w}^1$$

$$D = \|d_{ij}\|_{i,j=\overline{1,n}} \quad d_{ij} \leq 0 \text{ при } i \neq j$$

Опр! Будем говорить, что $D = \|d_{ij}\|_{i,j=\overline{1,n}}$ удовл-я условию $d_{ij} \leq 0$ при $i \neq j$ наз-ся продуктивной, если $\exists \vec{x} \geq 0$ такой, что $D \vec{x} > 0$

P.S. $D = E - A$

§2. Продуктивная матрица

Теорема 1

$\Phi = \|d_{ij}\|_{i,j=\overline{1,n}}$ удовлетворяет условию $d_{ij} \leq 0$ при $i \neq j$

Тогда следующие утв-я эквивалентны:

1° $\exists \bar{\pi} \geq 0$ такой, что $\Phi \bar{\pi} > 0$

2° $\forall \bar{w} \geq 0 \exists \bar{\pi} \geq 0 : \Phi \bar{\pi} = \bar{w}$

3° Условия Хакенса - Сэймона

$$\det \begin{pmatrix} d_{i_1 i_1} & d_{i_1 i_2} & \dots & d_{i_1 i_k} \\ d_{i_2 i_1} & d_{i_2 i_2} & \dots & d_{i_2 i_k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ d_{i_k i_1} & d_{i_k i_2} & \dots & d_{i_k i_k} \end{pmatrix} > 0 \quad k = \overline{1, n}$$

4° $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n$

$$\det \begin{pmatrix} d_{i_1 i_1} & d_{i_1 i_2} & \dots & d_{i_1 i_k} \\ d_{i_2 i_1} & d_{i_2 i_2} & \dots & d_{i_2 i_k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ d_{i_k i_1} & d_{i_k i_2} & \dots & d_{i_k i_k} \end{pmatrix} > 0$$

Примеры

$$\Phi = E - A \quad A \geq 0$$

$$n=1: \quad x_1 - a_{11} x_1 = w_1$$

$$1 > a_{11} \quad 1 - a_{11} > 0$$

$$n=2: \quad \begin{cases} x_1 - a_{11} x_1 - a_{12} x_2 = w_1 \\ x_2 - a_{21} x_1 - a_{22} x_2 = w_2 \end{cases}$$

$$1 > a_{11}, \quad 1 > a_{22}$$

$$\Phi = \begin{pmatrix} 1 - a_{11} & -a_{12} \\ -a_{21} & 1 - a_{22} \end{pmatrix}$$

$$(1 - a_{11})(1 - a_{22}) - a_{12} \cdot a_{21} > 0$$

$$x_2 = \frac{1}{1 - a_{22}} (w_2 + a_{21} x_1)$$

$$x_1 - \left(a_{11} + a_{21} \frac{a_{12}}{1 - a_{22}} \right) x_1 = w_1 + \frac{a_{12}}{1 - a_{22}} w_2$$

$$< 1$$

$$\hat{a}_{11} = a_{11} + \frac{a_{12} \cdot a_{21}}{1 - a_{22}} < 1$$

усл-е ДТС-я изобр.
произв. (и) изобр. и-го

$$\frac{(1 - a_{11})(1 - a_{22}) - a_{12}a_{21}}{1 - a_{22}} > 0$$

Лекция 2.

Проверка

$D = \|d_{ij}\|_{i,j=1,n}$ удовл-т усл-ю:

$$d_{ij} \leq 0 \quad \text{при } i \neq j \quad (1)$$

Тогда следующие утверждения эквивалентны:

$$1^\circ \exists \vec{x} \geq 0: D \vec{x} > 0$$

$$2^\circ \forall \vec{w} \geq 0 \exists \vec{x} \geq 0: \vec{w} = D \vec{x}$$

$$3^\circ k = 1, n$$

$$\det \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} & \dots & d_{1k} \\ d_{21} & d_{22} & \dots & d_{2k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ d_{k1} & d_{k2} & \dots & d_{kk} \end{pmatrix} > 0$$

$$4^\circ \forall 1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n$$

$$\det \begin{pmatrix} d_{i_1 i_1} & d_{i_1 i_2} & \dots & d_{i_1 i_k} \\ d_{i_2 i_1} & d_{i_2 i_2} & \dots & d_{i_2 i_k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ d_{i_k i_1} & d_{i_k i_2} & \dots & d_{i_k i_k} \end{pmatrix} > 0$$

$$1^\circ \Rightarrow 3^\circ$$

По индукции.

$$n=1: \exists x_1 \geq 0: d_{11} \cdot x_1 > 0$$

$$\Rightarrow d_{11} > 0$$

$$d_{11} x_1 + d_{12} x_2 + \dots + d_{1n} x_n = w_1$$

$$d_{21} x_1 + d_{22} x_2 + \dots + d_{2n} x_n = w_2 \quad (2)$$

$$d_{n1} x_1 + d_{n2} x_2 + \dots + d_{nn} x_n = w_n$$

$$\exists x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0: w_1 > 0, w_2 > 0, \dots, w_n > 0$$

$$d_{11} x_1 = \underbrace{w_1}_{>0} - \underbrace{d_{12} x_2}_{\geq 0} - \dots - \underbrace{d_{1n} x_n}_{\geq 0} > 0 \Rightarrow d_{11} > 0$$

$$\begin{aligned} (1) \quad & d_{11}x_1 + d_{12}x_2 + \dots + d_{1n}x_n = w_1 \\ (2) \quad & d_{22}x_2 + \dots + d_{2n}x_n = w_2 \\ (3) \quad & d_{n2}x_2 + \dots + d_{nn}x_n = w_n \end{aligned}$$

$$\hat{d}_{ij} = d_{ij} - \frac{d_{1j}d_{i1}}{d_{11}} \geq 0 \quad \begin{matrix} i, j = \overline{2, n} \\ i = \overline{2, n} \end{matrix} \quad (4)$$

$$\hat{D} = \|\hat{d}_{ij}\|_{i,j=\overline{2, n}}, \text{ где } \hat{d}_{ij} \leq 0 \text{ при } i \neq j$$

По индуктивному предположению

$$\det \begin{pmatrix} \hat{d}_{22} & \dots & \hat{d}_{2k} \\ \vdots & & \vdots \\ \hat{d}_{k2} & \dots & \hat{d}_{kk} \end{pmatrix} > 0 \quad k = \overline{2, n} \quad (5)$$

$$\det \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} & \dots & d_{1k} \\ d_{21} & d_{22} & \dots & d_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ d_{k1} & d_{k2} & \dots & d_{kk} \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} & \dots & d_{1k} \\ 0 & \hat{d}_{22} & \dots & \hat{d}_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \hat{d}_{k2} & \dots & \hat{d}_{kk} \end{pmatrix} = d_{11} \cdot \det \begin{pmatrix} \hat{d}_{22} & \dots & \hat{d}_{2k} \\ \vdots & & \vdots \\ \hat{d}_{k2} & \dots & \hat{d}_{kk} \end{pmatrix} \quad (6)$$

⇒ w

3° ⇒ 2°:

$$n=1: d_{11} > 0 \quad \forall w_1 \geq 0 \quad \exists x = \frac{w_1}{d_{11}} \geq 0, d_{11} \cdot x_1 = w_1$$

Проверить: $\forall w_1 \geq 0, \dots, w_n \geq 0 \quad \exists? x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \dots, x_n \geq 0$

Т.к. все присоед. и. миноры положит., то возьмем экв-ю с-у. В (4) $w_1 \geq 0, w_2 \geq 0$. Имеем $\hat{D}$ на (2)

По инд-му предп-ю: $\exists x_2 \geq 0, \dots, x_n \geq 0$, удовн-е (3)

$$w_1 \geq 0, d_{11} x_1 \geq 0$$

$$x_1 = \frac{1}{d_{11}} (w_1 - d_{12}x_2 - \dots - d_{1n}x_n) \geq 0$$

⇒ w

2° ⇒ 1°:

очевидно !!!

$$1^\circ \Rightarrow 3^\circ \Leftrightarrow 2^\circ \Rightarrow 1^\circ$$

и

$$4^\circ \Rightarrow 3^\circ$$

очевидно!!!

$$1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_n \leq n$$

Построим пер-у (?) : $i_1 \rightarrow 1, i_2 \rightarrow 2, \dots, i_n \rightarrow n$

E_n :

$$E_n \vec{x} = \vec{x}_n \geq 0 \Leftrightarrow \vec{x} \geq 0$$

$$E_n^* = E_n^T \text{ (обр-я к } E_n \text{ - трансп. м.)}$$

$$\forall \vec{w} \geq 0 \exists \vec{x} \geq 0 : \vec{w} = \mathcal{D} \vec{x}$$

$$\text{Умножим } \mathcal{D} \vec{x} \text{ на } E_n : \vec{w}_n = E_n \cdot \mathcal{D} \vec{x} \Leftrightarrow$$

$$E_n \mathcal{D} = E_n E_n^T = E_n$$

$$\Leftrightarrow E_n \cdot \mathcal{D} E_n^T E_n \vec{x} \Leftrightarrow \mathcal{D}_n = E_n \mathcal{D} E_n^T \Leftrightarrow (E_n \mathcal{D} E_n^T) \cdot \vec{x}_n$$

$$2^\circ \forall \vec{w}_n \geq 0 \exists \vec{x}_n \geq 0 : \mathcal{D}_n \cdot \vec{x}_n = \vec{w}_n$$

$$\text{т.к. } 2^\circ \Leftrightarrow 3^\circ$$

замечание

$$\vec{x} = A \vec{x} + \vec{w}$$

$$\text{Ищем такие цены } \vec{p} = (p_1, \dots, p_n) \geq 0 : \underbrace{\mathcal{D} \vec{c}}_{\geq 0} = \vec{p} - \sum_{j=1}^n \underbrace{p_j a_{ji}}_{\text{затраты на сырье}} \quad \forall i=1, n$$

$$\exists \vec{p} \geq 0 : \vec{\pi} = \vec{p} - A^* \vec{p} > 0$$

Теорема 1'

— || —

$$1^\circ - 4^\circ$$

$$5^\circ \exists \vec{p} \geq 0 : \mathcal{D}^* \vec{p} > 0$$

$$6^\circ \forall \vec{\pi} \geq 0 \exists \vec{p} \geq 0 : \vec{\pi} = \mathcal{D}^* \vec{p}$$

7. все последовательные главные миноры матрицы $\mathcal{D}^*$ положительны

8. все главные миноры м-цы $\mathcal{D}^*/\mathcal{D}^T$ положительны

$$9^\circ \exists D^{-1} \Rightarrow 0$$

м-ца D - неотриц.
определена.

▲

$$\text{по т-е 1: } 1^\circ \Leftrightarrow 2^\circ \Leftrightarrow 3^\circ \Leftrightarrow 4^\circ$$

$$5^\circ \Leftrightarrow 6^\circ \Leftrightarrow 7^\circ \Leftrightarrow 8^\circ \text{ по т-е 1 где м-ца } D^*$$

$$3^\circ \Leftrightarrow 7^\circ$$

$$9^\circ \Rightarrow 2^\circ:$$

$$\forall \vec{w} \geq 0 \quad \vec{x} = D^{-1} \vec{w} \geq 0$$

$$3^\circ \Rightarrow \det D > 0 \Rightarrow \exists D^{-1}$$

$$\forall \vec{w} \geq 0 \quad \vec{x} = D^{-1} \vec{w} \geq 0$$

$$\exists \vec{w} = \vec{e}_i = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}_i$$

$$D^{-1} \vec{e}_i - i\text{-ая строка м-цы } D^{-1} \Rightarrow D \geq 0$$

$$D = E - A$$

$$D = (pE - A)$$

$$h=1 \quad 0 \leq a < 1$$

$$\frac{1}{1-a} = 1 + a + a^2 + \dots + a^k + \dots$$

$$(E - A)^{-1} = E + A + A^2 + \dots + A^k + \dots$$

$$(pE - A)^{-1} = \frac{1}{p} (E - \frac{1}{p}A)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{p^{k+1}} A^k$$

Теорема 2.

$$\exists A = \|a_{ij}\|_{i,j=1,n} \geq 0. \text{ Тогда:}$$

$$1^\circ \text{ если } \exists (pE - A)^{-1} \geq 0, \text{ то } p > 0 \text{ и ряд}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{p^{k+1}} A^k \text{ сходится и его сумма равна}$$

$$(pE - A)^{-1} \quad \{ A^0 = E \}$$

$$2^\circ \text{ если } p > 0 \text{ и ряд (7) сходится, то } \exists (pE - A)^{-1} \geq 0$$

$$1^\circ: \text{ По т-е 1' } p - a_{11} > 0 \Leftrightarrow p > a_{11} \geq 0$$

$$T_s = \sum_{k=0}^s \frac{1}{p^{k+1}} A^k$$

$$T_1 \leq T_2 \leq \dots \leq T_s \leq T_{s+1}$$

$$(pE - A) \cdot T_s = T_s (pE - A) = E - \frac{1}{p^{s+1}} A^{s+1} \quad (8)$$

$$(pE - A) T_s = p T_s - A T_s = \sum_{k=0}^s \frac{1}{p^k} A^k - \sum_{k=0}^s \frac{1}{p^{k+1}} A^{k+1} =$$

$$= E - \frac{1}{p^{s+1}} A^{s+1}$$

Умножим л.ч. и п.ч. на $(pE - A)^{-1}$:

$$T_s = (pE - A)^{-1} (pE - A) T_s = (pE - A)^{-1} \cdot \frac{1}{p^{s+1}} (pE - A)^{-1} \cdot A^{s+1} \vec{e}$$

$$\leq (pE - A)^{-1}$$

Поскольку монотонная ограниченная посл-ва имеет предел, получим, что $\exists \lim_{s \rightarrow \infty} T_s = T \geq 0$ (9)

$$\frac{1}{p^{s+1}} A^{s+1} = p(T_{s+1} - T_s)$$

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \frac{1}{p^{s+1}} A^{s+1} = 0 \quad (10)$$

Переходя к пределу в (8), получим, что:

$$(pE - A) \cdot T = T(pE - A) = E \quad (11)$$

$$T = (pE - A)^{-1}$$

2: Т.к. A неотриц., $p \geq 0$, сл-во (8). Уб-е, что сл-во 0 $\in U(7)$, сл-во (9), $\lim T_s = T \geq 0$.

Из $g^k \Rightarrow 10^k$. Возьмем переходим к $\lim$ в (8), k -й бюджет $\Rightarrow 0 \Rightarrow w$

Замечание

$$(E - A)^{-1} = E + A + A^2 + A^3 + \dots$$

$$\vec{x} = (E - A)^{-1} \vec{w} = \vec{w} + A\vec{w} + A^2\vec{w} + \dots + A^k\vec{w} + \dots$$

сумма в каждой стр-ке
кон-ве для
суммирования
сумма из прошлого
неб-х
столько
сумма

и-ца $(E - A)^{-1}$ - и-ца полных затрат (миллионов)

и-ца A - и-ца прямых затрат

Лекция 3.

§3. Спектральные свойства неотрицательных матриц.
А $\exists$ ли у неё неотриц. с.ч., с.в.?

Пример

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad |A - \lambda E| = \lambda^2 + 1 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \pm i$$

Лемма 1

$\exists A = \|a_{ij}\|_{i,j=1,n} \geq 0$ и $\exists M(A)$ - мин-во: $M(A) = \{p \mid \exists (pE - A)^{-1} \geq 0\}$

Тогда $M(A) = [\lambda(A), +\infty)$, где $\lambda(A) \geq 0$ - ~~наименьшее~~ ^{наименьшее} ~~отличное от 0~~ ^{не-0 число, зависящее от A}

Шаг 1. Покажем, что $M(A) \neq \emptyset$

Зафиксируем произвольный вектор $\hat{x} = (\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_n) > 0$

Выберем $\hat{p} > \max_i \frac{[A\hat{x}]_i}{\hat{x}_i} : \hat{p}\hat{x} > A\hat{x}$, т.е.
 $(\hat{p}E - A)\hat{x} > 0 \Rightarrow (\hat{p}E - A)$ - продуктивна $\xrightarrow{\text{т.1}} \hat{p} \in M(A)$

Шаг 2. Покажем, что если $\eta > p, p \in M(A)$, то $\eta \in M(A)$

Если $p \in M(A)$, т.е. $\exists (pE - A)^{-1} \geq 0 \xLeftrightarrow{\text{т.1}} (pE - A)$ продуктивна
 $\Rightarrow \exists \bar{x} \geq 0 : (pE - A)\bar{x} > 0$, т.е. $p\bar{x} > A\bar{x} \geq 0 \Rightarrow \bar{x} > 0$

Тогда $\eta\bar{x} > p\bar{x} > A\bar{x}$, т.е. $(\eta E - A)$ продуктивна $\xrightarrow{\text{т.1}} \eta \in M(A)$

Шаг 3. Определим число $\lambda(A) = \inf\{p \mid \exists (pE - A)^{-1} \geq 0\} \geq 0$,

т.к. по т.1 все главные миноры $(pE - A)$ положительны

$$\Rightarrow p - a_{ii} > 0 \Rightarrow p > 0$$

Тогда в силу шага 2 $M(A) = [\lambda(A), +\infty)$ и $\lambda(A) \in M(A)$

Покажем, что $\lambda(A) \notin M(A)$.

От противного. $\exists \lambda(A) \in M(A) \xrightarrow{\text{т.1}} (\lambda(A)E - A)$ продуктивна, т.е. $\exists \bar{x} \geq 0 : \lambda(A)\bar{x} \geq A\bar{x} \geq 0 \Rightarrow \exists \varepsilon > 0$

$(\lambda(A) - \varepsilon)\bar{x} > A\bar{x}$, т.е. $(\lambda(A) - \varepsilon)E - A$ - продуктивна $\xrightarrow{\text{т.1}} (\lambda(A) - \varepsilon) \in M(A)$ - против-е с опре. $\lambda(A)$.

Лемма 2.

$\exists A = \|a_{ij}\|_{i,j=1}^n \geq 0$, $M(A) = \{p \mid \exists (pE - A)^{-1} \geq 0\} =$
 $= (\lambda(A), +\infty)$. Тогда $\exists \bar{x}_A \geq 0$, $\bar{x}_A \neq 0$: $A\bar{x}_A = \lambda(A)\bar{x}_A$

Шаг 1.

Зафиксируем произвольный вектор $\bar{w} = (w_1, \dots, w_n) > 0$

Положим при $p > \lambda(A)$ ($p \in M(A)$) $\bar{y}(p) = (pE - A)^{-1} \bar{w} \geq 0$,
 тогда $p\bar{y}(p) - A\bar{y}(p) = \bar{w}$ (1)

Покажем, что если $q > p > \lambda(A)$, то $\bar{y}(q) \leq \bar{y}(p)$,

т.е. $\bar{y}(p)$ монотонно не возрастает по p .

По опр $\bar{y}(q)$: $q\bar{y}(q) - A\bar{y}(q) = \bar{w}$ (1')

Из (1), (1') $\Rightarrow (pE - A)(\bar{y}(p) - \bar{y}(q)) - (q - p)\bar{y}(q) = 0$

$\Rightarrow \bar{y}(p) - \bar{y}(q) = (q - p)(pE - A)^{-1} \bar{y}(q) \geq 0$, т.е. $\bar{y}(p) \geq \bar{y}(q)$

$\bar{y}(p)$ монот

Шаг 2 Положим при $p > \lambda(A)$ $\delta(p) = \sum_{j=1}^n [\bar{y}(p)]_j > 0$

тогда $\delta(p)$ невозрастающая на $(\lambda(A), +\infty)$

Покажем, что $\lim_{p \rightarrow \lambda(A)+0} \delta(p) = +\infty$ (2)

Допустим противное. Тогда $\exists \delta < +\infty$: $\delta(p) \leq \delta$ при

$p > \lambda(A) \Rightarrow [\bar{y}(p)]_j \leq \delta$ при $p > \lambda(A)$

$\Rightarrow$ в силу $\bar{y}(p) \geq 0 \Rightarrow \lim_{p \rightarrow \lambda(A)+0} \bar{y}(p) = \bar{y} \geq 0$

В (1) перейдем к пределу при $p \rightarrow \lambda(A)+0 \Rightarrow$

$\lambda(A)\bar{y} - A\bar{y} = \bar{w} > 0$, т.е. $(\lambda(A)E - A)$ продуктивна,

т.е. по Ф. 1' $\lambda(A) \in M(A)$ - против-е с Леммой 1.

Шаг 3 Положим при $p > \lambda(A)$ $x(p) = \frac{1}{\delta(p)} \bar{y}(p) \in K$

$= \{\bar{x} = (x_1, \dots, x_n) \geq 0, \sum_{i=1}^n x_i = 1\}$

Возьмем послед $\{p(t) \mid t=1, 2, \dots\}$ ок-ся сверху к $\lambda(A)$.

Возьмем из посл-ы $\{\bar{x}(p(t)) \mid t=1, 2, \dots\} \in K$ - подпослед-ю

сходящую к $\lim_{t \rightarrow \infty} \bar{x}(p(t)) = \bar{x}_A \in K$, тогда $\bar{x}_A \geq 0$,

$\bar{x}_A \neq 0$ (3)

При $p > \lambda(A)$ из (1) $\Rightarrow p\bar{x}(p) - A\bar{x}(p) = \frac{1}{\sigma(p)} \bar{w}$ (4)
 Для $p = p(t(\tau))$ перейдем в (4) к $\lim_{\tau \rightarrow \infty}$
 $\lambda(A)\bar{x}_\infty - A\bar{x}_\infty = 0$, т.е. в силу леммы 2 $\lim_{p \rightarrow \lambda(A)+0} \sigma(p) = +\infty$

Лемма 2.

$A = \|a_{ij}\|_{i,j=1,n} \geq 0$ и $M(A) = \{p \mid \exists (pE - A)^{-1} \geq 0\} = [\lambda(A), +\infty)$. Тогда $\exists \bar{x}_\infty \geq 0, \bar{x}_\infty \neq 0: A\bar{x}_\infty = \lambda(A)\bar{x}_\infty$.

Теорема 3. (Фробениус - Перрон).

$A = \|a_{ij}\|_{i,j=1,n} \geq 0$. Тогда:

- 1) среди с.з. л-цы A есть неотриц. вещ-е $\lambda(A)$ и наибольшему из них $\lambda(A)$ соотв. матриц с.в. $\bar{x}_\infty$;
- 2) $\exists (pE - A)^{-1} \geq 0 \Leftrightarrow p > \lambda(A)$
- 3) если $\bar{y} \geq 0, \bar{y} \neq 0, A\bar{y} \geq \mu\bar{y}$, то $\mu \leq \lambda(A)$;
- 4) если $\bar{z} \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}, A\bar{z} = \omega\bar{z}$, то $|\omega| \leq \lambda(A)$

1) и 2) следуют из леммы 1, 2, т.к. при $p > \lambda(A)$, $p \in M(A)$ и из м-ти 1' $\Rightarrow \det(pE - A) > 0 \Rightarrow p > \lambda(A)$ кс аб-я с.з. л-цы A

3) Допустим противное, что $\bar{y} \geq 0, \bar{y} \neq 0, \mu\bar{y} \leq A\bar{y}$, т.е. $(\mu E - A)\bar{y} \leq 0$ при этом пусть $\mu > \lambda(A) \Rightarrow \exists (\mu E - A)^{-1} \geq 0 \Rightarrow \bar{y} = (\mu E - A)^{-1}(\mu E - A)\bar{y} \leq 0$ - противоречие

4) $\exists \bar{z} = (z_1, \dots, z_n) \neq 0, z_k \in \mathbb{C}, A\bar{z} = \omega\bar{z}$

Обозначим $y_i = |z_i|$
 $y = (y_1, \dots, y_n) \geq 0, y \neq 0 \Rightarrow | \omega | |y_i| = | \omega z_i | = \left| \sum_{j=1}^n a_{ij} z_j \right| \leq \sum_{j=1}^n |a_{ij} z_j| = \sum_{j=1}^n a_{ij} y_j \Rightarrow | \omega | \bar{y} \leq A \bar{y} \Rightarrow$

$| \omega | \leq \lambda(A)$

Вспр. $A = \|a_{ij}\|_{i,j=1}^n, \geq 0$. Тогда $\lambda(A) = \inf \{ \rho \mid \exists (p \in A)^+ \geq 0 \}$
 называется числом Фробениуса - Перрона
 матрицы A , а соотв. с. в. $\bar{x}_A \geq 0, \bar{x}_A \neq 0$
 $(A \bar{x}_A = \lambda(A) \bar{x}_A)$ - вектор Фробениуса - Перрона
 матрицы A .

Замечание

Если выпуск $\bar{x}(t) = S^t \hat{x}$, т.е. соответствующую систему
 сдв. роста, то из динамич. модели Леонтьева
 $\bar{x}(t) = A \bar{x}(t-1) + \bar{w}(t)$, $\bar{w}(t) = \rho^t \bar{w} \Rightarrow \frac{1}{S} \bar{x} = A \bar{x} + \bar{w}$,
 $\bar{x} \geq 0, \bar{w} \geq 0$, т.е. $\bar{x} = \underbrace{\left(\frac{1}{S} E - A \right)^{-1} \bar{w}}_{\text{продуктивна}}$

$$\frac{1}{S} > \lambda(A) \Leftrightarrow S = \frac{1}{\lambda(A)}$$

$\frac{1}{\lambda(A)}$ - технологическое ограничение на темп
 роста в простейшей динам. модели
 В. Леонтьева.

Свойства числа Ф-П.

$A = \|a_{ij}\|_{i,j=1}^n, \geq 0$, $\lambda(A)$ - число Ф-П. Тогда

- 1) $\lambda(A^*) = \lambda(A)$
- 2) если $\alpha > 0$, то $\lambda(\alpha A) = \alpha \lambda(A)$
- 3) $\lambda(A^t) = (\lambda(A))^t$, где $t \in \mathbb{N}$
- 4) если $A \geq B \geq 0$, то $\lambda(A) \geq \lambda(B)$
- 5) если C - главная подматрица A , то $\lambda(A) \geq \lambda(C)$
- 6) если $\lambda(A) = 0$, то $\Leftrightarrow A^n = 0$

1), 2) очевидно

3) По т. Ф-П $\exists \bar{x}_A \neq 0, \bar{x}_A \geq 0 : A \bar{x}_A = \lambda(A) \bar{x}_A \Rightarrow$

$$A^2 \bar{x}_A = \lambda^2(A) \bar{x}_A$$

$$A^k \bar{x}_A = (\lambda(A))^k \bar{x}_A \Rightarrow$$

$$A^{k+1} \bar{x}_A = (\lambda(A))^{k+1} \bar{x}_A$$

$$(\lambda(A))^t = \text{с.ч. } A^t$$

$$\Rightarrow \lambda(A^t) \geq (\lambda(A))^t$$

$$\exists \lambda(A^+) > (\lambda(A))^+$$

$$\hat{\rho} = (\lambda(A^+))^{1/2} > \lambda(A)$$

$\hat{\rho} \in M(A) \xrightarrow{1.1'} (\hat{\rho} E - A)$ продуктивна, т.е. $\exists \bar{x} > 0$:

$$\hat{\rho} \bar{x} > A \bar{x} \geq 0 \Rightarrow \bar{x} > 0$$

Предположим, что $(\hat{\rho})^k \hat{x}^1 > A^k \hat{x}^1 \Rightarrow$ ~~по индукции~~

$$(\hat{\rho})^{k+1} \hat{x}^1 > (\hat{\rho})^k A \hat{x}^1 \geq A^{k+1} \hat{x}^1$$

Для $k=t$: $(\hat{\rho})^t \hat{x}^1 > A^t \hat{x}^1 \Rightarrow [\lambda(A^+) E - A^+]$ продуктивна

$$\Leftrightarrow [\dots] \text{ имеет обратную} \xrightarrow{1.3} \lambda(A^+) \in M(A^+)$$

- противоречие с л. 1.



Лекция 4.

Теорема [Фробениус, Перрон]

$\exists A = \|a_{ij}\|_{i,j=1,n} \geq 0$. Тогда:

- 1) среди с. л. м-ца A есть хотя бы 1 неотриц. вещ. число, и наиб. из них $\lambda(A)$ — соответствует неотриц. с. в.
- 2) м-ца $(pE - A)$ необр. $\iff \exists (pE - A)^{-1} \geq 0 \iff p > \lambda(A)$
- 3) если $\vec{y} \geq 0, \vec{y} \neq 0, A\vec{y} = \mu\vec{y}$, то $\mu \leq \lambda(A)$
- 4) если $A\vec{z} = \omega\vec{z}$, где $\vec{z} \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ (т.е. ω — с. л. м-ца A , $\vec{z}$ — её с. в.), то $|\omega| \leq \lambda(A)$

Д-м до конца т-у о св-вах числа Ф.П.

$$\textcircled{4} M(A) = \{p \mid \exists (pE - A)^{-1} \geq 0\}, \lambda(A) = \inf_{p \in M(A)} p$$

$$M(B) = \{p \mid \exists (pE - B)^{-1} \geq 0\}, \lambda(B) = \inf_{p \in M(B)} p$$

Д-м док-ь вкл-е $M(A) \subseteq M(B)$

Выберем $\forall p \in M(A)$ по т-е 1 $\exists \vec{x} \geq 0 \mid p\vec{x} > A\vec{x} \geq B\vec{x}$
м-ца $(pE - B)$ пруд на по стр-ю по т-е 1 $p \in M(B)$

$$\textcircled{5} \exists A = \begin{pmatrix} C & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} C & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = B \geq 0 \stackrel{\textcircled{4}}{\implies} \lambda(A) \geq \lambda(B) = 0$$

$$\textcircled{6} \text{ Из } A^n = 0 \implies \lambda(A^n) = (\lambda(A))^n = 0 \implies \lambda(A) = 0$$

Для д-ва в обр-ю ст-у, зафикси-м постр. $\forall p$
 $\vec{x} > 0$, число $\lambda > 0$: $A\vec{x} \leq \mu\vec{x}$. Очевидно:

$$0 \leq A^{s+1}\vec{x} \leq \lambda A^s\vec{x} \quad s=0,1,\dots$$

Введем индексные мн-ва $N_s \equiv \{i \mid [A^s\vec{x}]_i > 0\}$.

Получим: $N_0 \supset N_1 \supset \dots \supset N_s \supset N_{s+1} \supset \dots$

Покажем, что $N_n = \emptyset$, т.е. порядок мн-ца A . Если

$N_s \neq \emptyset$, то положим $\mu = \min_{i \in N_s} \frac{[A^{s+1}\vec{x}]_i}{[A^s\vec{x}]_i}$. Число μ удовлет-т усл-ю $A^{s+1}\vec{x} \leq \mu A^s\vec{x}$ и $A^s\vec{x} \neq 0$. Поэтому, в силу $\textcircled{3}$ $\mu \leq \lambda(A)$. Но $\lambda(A) = 0$, а $0 \leq \mu \implies \mu = 0$. Т.е. $\exists$ хотя бы 1 индекс $i \in N_s \mid [A^{s+1}\vec{x}]_i = 0$. Тогда $N_{s+1} \subsetneq N_s$ — строго постр. мн-во N_s . Т.к. N_0 сод-т n эл-в $\implies N_n = \emptyset \implies A^n\vec{x} = 0$. Учитывая $\vec{x} > 0, \vec{x} \neq 0$

Опр. Квадр. м-ца $A = \|a_{ij}\|_{i,j=1}^n \geq 0$ ав-я разложимой, если $\exists$ соотв. подматр-во J мн-во $N = \{1, \dots, n\}$ номеров строк J и м-ца такое, что $a_{ij} = 0$, если $i \notin J, j \in J$.

Замечание.

Если м-ца A разложима, то её можно пред-в в виде:

$$E^T A E = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix}$$

где E - м-ца перестановок, перевод-я мн-во J в мн-во $\{1, 2, \dots, |J|\}$. В таком виде $|J| \times |J|$ м-ца A соотв-т тем отраслям, к-е исп-т свои ресурсы-то не зависят от поставок ресурсов отраслей, соотв-х индексам мн-ва $N \setminus J$. Из разл-и $A \Rightarrow a_{ij} = 0 \quad i \in J, j \notin J$. Критерий разложимости

$A = \|a_{ij}\|_{i,j=1}^n \geq 0$. Для того, чтобы м-ца A была разложимой $\Leftrightarrow$ чтобы $\exists$ ненулевой вектор $\vec{x} (\vec{x} \geq 0, \vec{x} \neq 0, \vec{x} \leq 0)$ и число $\mu \geq 0, \mu \in \mathbb{R} : A \vec{x} \leq \mu \vec{x}$

⊖

По предп-ию $J = \{j \in N \mid [\vec{x}]_j > 0\}$ - непустое соотв. подматр-во N . Из усл-я $A \vec{x} \leq \mu \vec{x}$ для $i \in J$ имеем:

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} [\vec{x}]_j \leq 0 \Rightarrow a_{ij} [\vec{x}]_j = 0 \quad \forall i \in J, j \in N \Rightarrow$$

$a_{ij} = 0$, если $i \notin J, j \in J$

⊕

$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix}$, где A_{11}, A_{22} - квадр. м-цы

т.к. $A_{11} \geq 0$ по т. 3 $\exists \vec{x}_1 \geq 0, \vec{x}_1 \neq 0 \mid A_{11} \vec{x}_1 = \lambda(A) \vec{x}_1$

$\vec{x} = \begin{pmatrix} \vec{x}_1 \\ 0 \end{pmatrix} \geq 0, \vec{x} \neq 0, \vec{x} > 0$. Тогда:

$$A \vec{x} = \begin{pmatrix} A_{11} \cdot \vec{x}_1 + A_{12} \cdot \vec{0} \\ 0 \cdot \vec{x}_1 + A_{22} \cdot \vec{0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} \vec{x}_1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda(A) \vec{x}_1 \\ 0 \end{pmatrix} = \lambda(A) \vec{x} = \mu \vec{x}$$

т.о. при данных $\mu, \vec{x}$ усл-я имеют вид-ся в виде рав-ва

Лемма 4. М-ца $A = \|a_{ij}\|_{i,j=1}^n \geq 0$ разложима $\Leftrightarrow$ разложима М-ца A .

Если $a_{ij} = 0$ для $i \notin J, j \in J$ где J — непустое сообщ. подмножество М-ва N , то $a_{ij} = 0$ для $i \notin N \setminus J, j \in N \setminus J$. Поэтому для разл-м-ца A следует из разл-м-ца A по тем же сообщ-м. что разл-м-ца A следует $A = A^2$.
 Спр. Будем док-з, что неотриц. кв. матр. A яв-я разложимой, если она не яв-я разложимой или нулевой матр. 1-го порядка.
 (про разложимость)
 Вспомог. $\exists t \in \mathbb{N}; t$ зав-т от n , что у A^t в i -й строке, j -й ст-це стоит полож.

Теорема 5

$\exists A = \|a_{ij}\|_{i,j=1}^n \geq 0$ разложима. Тогда:

- 1) $\lambda(A) > 0$ и, если $\vec{x}_A \geq 0, \vec{x}_A \neq 0$ — вектор Фробениуса — $\vec{x}_A > 0$ (Персона)
- 2) если $A\vec{y} = \lambda(A)\vec{y}$ ($\vec{y} \in \mathbb{C}^n$), то $\exists \theta / \vec{y} = \theta \vec{x}_A$ (т.е. $\vec{y}$ неразл-м-ца сообщ. подгр-ва, соотв. $\lambda(A)$, одномерное)

1) от противного.

$\exists \vec{x}_A$ не полож. $\Rightarrow \vec{x}_A$ неположит. по 1.3 $\Rightarrow A$ — разложима $\Rightarrow$ противоречие. Значит, $\vec{x}_A > 0 \Rightarrow A\vec{x}_A \neq 0 \Rightarrow \lambda(A) \neq 0 \Rightarrow \lambda(A) > 0$.

2) $\exists A\vec{y} = \lambda(A)\vec{y}$, а $\vec{x}_A$ — вектор Ф.-П., значит $A\vec{x}_A = \lambda(A)\vec{x}_A$. Р-м вектор $\vec{y}(t) \equiv \vec{y} - t\vec{x}_A$. Для него верно $A\vec{y}(t) = \lambda(A)\vec{y}(t) \forall t$. Возберем $\theta \equiv \min_{j=1, \dots, n} \frac{[\vec{y}]_j}{[\vec{x}_A]_j}$. Тогда $[\vec{y}]_j \geq \theta [\vec{x}_A]_j, (j=1, \dots, n) \Rightarrow \vec{y}/\theta \geq 0$. Возможен 2 вар-а:

1) $\vec{y}/\theta$ — вектор Фроб. — Пер. Но это против 1) т.к. будет по крайней мере 1 координ = 0

2) $\vec{y}/\theta = 0 \Rightarrow \vec{y} = \theta \vec{x}_A$ — неотриц. кв. М-ца A пер-м. $\Rightarrow$ A , если t пер-м (i,j) $\Rightarrow \exists t \in \mathbb{N}: t = t(i,j)$ что у A^t в i -й строке, j -й ст-це будет положительное значение. (1)

5. Устойчивые матрицы

$\exists A = \|a_{ij}\|_{i,j=1}^n \geq 0$ — разложимая М-ца $\lim_{p \rightarrow \infty} \frac{1}{p} A^p = \begin{cases} 0 & p > \lambda(A) \\ \neq 0 & p < \lambda(A) \end{cases}$ (но т. Фроб.-П. и т. 2-х разложимых). Если взять и разл-м-ца A и разл-м-ца B по $\lambda(A) < \lambda(B)$

Интересен случай, когда $\rho = \lambda(A)$. чему равен $\lim_{t \rightarrow \infty} (\frac{1}{\lambda(A)} A)^t$? Поведение м-ца $(\frac{1}{\lambda(A)} A)^t$ имеет колес-ий хар-р даже в сл-е, если м-ца A неразложима

Пример.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Собств. λ . $\lambda_{1,2} = \pm 1$, $\lambda(A) = 1$

$$A^2 = E; A^3 = A; A^4 = E, \dots, A^{2k} = E; A^{2k+1} = A;$$

$$\Rightarrow \lim \neq$$

Опр. Квадр. м-ца $A = \|a_{ij}\|_{i,j=1,n}$ яв-я устойчивой, если $\exists k \geq 0$ $|A|^k > 0$

М-ца A неразл-ма $\Leftrightarrow \forall (i,j), i,j \in N: 1 \leq i,j \leq n, \exists t \in N: (a_{ij}^t) > 0$

Теорема

$\square A = \|a_{ij}\|_{i,j=1,n}$ - неразл. м-ца.

1) Тогда где того, чтобы $\exists \lim$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (\frac{1}{\lambda(A)} A)^t = B$$

$\Leftrightarrow$ чтобы м-ца A была уст-й

2) если $\lim \exists$, то каждой ст-це предельной м-цы B яв-я векторы Фроб. - Пер. м-цы A , а каждая строка яв-я векторы Фроб. - Пер. м-цы A^T

Заметим, что $\lambda(\frac{1}{\lambda(A)} A) = \frac{\lambda(A)}{\lambda(A)} = 1$ (при умн-и м-цы на λ число $\lambda(A)$)

$$\square \lambda(A) = 1$$

Шаг 1

$\mathcal{L}$ -и $\mathcal{L}^c$ утв. т-н. Запишем соот-я:

$$A^t \cdot A = A^{t+1}$$

$$A \cdot A^t = A^{t+1}$$

Предп-м, что A^t сим. $\lim$

$$B \circ A = B \Leftrightarrow A^T B^T = B^T \quad \lambda(A) = 1, \text{ т.к. } A = E$$

$$(A \cdot B = B \text{ (из 2-ого)}) \leftarrow$$

т.к. $\lim$ неотриц. м-ца неотриц., то $B \geq 0$.

Заметим, что $\lambda(A) = \lambda(A^T) = 1$ в силу симметрии.

альтернатива: каждый ст-ц м-цы B явл-я сим. вектором Φ -П м-цы A , или

⊖. Из симметрии: каждая строка м-цы B явл-я сим. вектором Φ -П м-цы A^T , или нулевым в-м

Д-м, что все м.д. нул. ст-цы

От пр-го. У м-цы B $\exists$ нул. ст-ц. Тогда в

каждой стр. м-цы B $\exists$ нул. эл-т $\Rightarrow$

по т. 5 (т.к. A^T - неразл.) в м-це B нет

столб., явл-я век-ц Φ -П. $\Rightarrow B = 0$. Но в силу

$$\text{т.т. 5 } \exists \vec{x}_A > 0 \mid A \vec{x}_A = \vec{x}_A \text{ (т.к. } \lambda(A) = 1) \Rightarrow A^t \vec{x}_A = \vec{x}_A$$

Перейдем к пределу при $t \rightarrow \infty$: $0 = B \vec{x}_A = \vec{x}_A > 0$ - пр-е.

Значит 0-столб. в B не м.д., как и 0-строк

Шаг 2 ($\Leftarrow$)

Из т. 5, имеем шаг 1: $\exists \lim A^t = B > 0$

$$\Rightarrow \exists t \geq 1 \mid \forall t \geq t \quad A^t > 0. \quad \exists k > t, \text{ Тогда } A^k > 0.$$

Шаг 3 ($\Rightarrow$)

Введем $\min_{i,j \in \{1, \dots, n\}} a_{ij} = \varepsilon > 0$. Т.к. A - неразл. $\Rightarrow$ из n^2 эл-тов

$[A]_{ij}$ выберем наименьшее. Оно тоже будет полож.,

$$\text{т.е. } \min_{i,j \in \{1, \dots, n\}} \frac{a_{ij}}{[A]_{ij}} = \delta > 0. \text{ Р-н ЛДС: } \begin{cases} \vec{y}(t+1) = A \vec{y}(t) \\ \vec{y}(t) = A^t \vec{y}(0) \\ \vec{y}(0) \geq 0, \vec{y}(0) \neq 0 \end{cases}$$

Если $\exists \lim_{t \rightarrow \infty} A^t \Rightarrow \exists \lim_{t \rightarrow \infty} \vec{y}(t)$, равной в ру Φ -П.

предельной м-цы. Покажем, что это верно и в

обр-ю ст-ц. Возьмем $i^{\text{ю}}$ баз. ст-ц м-цы A в кач-ве

$\vec{y}(0)$, получим $i^{\text{ю}}$ баз. ст-ц м-цы A^t .

Лекция 5

§6. Идемпотентные аналоги теоремы о неотрицательных матрицах и их приложения

$\mathcal{R}_{++}$

$$a \oplus b = \max(a, b)$$

$$a \oplus b = a \cdot b$$

$$a \oplus a = a$$

Б.1. Модель баланса знаний Канторовича — Макарова

$1, \dots, n$

$x_i > 0$ — уровень продвижения

$x = (x_1, \dots, x_n) > 0$ положение деп во всех работах

Введем $a_{ij} x_j \leq x_i \quad i, j = \overline{1, n}$

необх-е
зн-я в
этом напр-и
чтобы доб-ся
усп. в напр-и

$$\max_j a_{ij} x_j \leq x_i \quad i = \overline{1, n}$$

$$A = \|a_{ij}\|_{i,j=\overline{1,n}} > 0$$

Векторный вид: $A^{(1)} \bar{x} \leq \bar{x}$

идемп.
сфера
 $A^{(1)} \bar{x} \leq \bar{x}$

Опр. Будем говорить что м-ца $A = \|a_{ij}\|_{i,j=\overline{1,n}} > 0$ является продуктивной идемпотентной матрицей, если $\exists x = (x_1, \dots, x_n) > 0$ такой, что

$$\max_j a_{ij} x_j \leq x_i$$

Б.2. Арбитражные цепочки на валютном рынке

$1, 2, \dots, n$ — др. валюта

a_{ij} — как валюта j -го вида к-е можно получить при обмене за единицу валюты i -го вида

$A = \|a_{ij}\|_{i,j=\overline{1,n}}$ — матрица курсов — резервов

Опр. Будем говорить, что матрица косе-
ксов $A = \|a_{ij}\|_{i,j=1, \dots, n} > 0$ допускает
арбитражноую цепочку
 $(i_1, \dots, i_k)$ - монотонно возрастающую
где $i_j \in \{1, \dots, n\}$, $i_j \neq i_{j+1}$

$$a_{i_1 i_2} \cdot a_{i_2 i_3} \cdot \dots \cdot a_{i_{k-1} i_k} \cdot a_{i_k i_1} > 1$$

кол-во денег в валюте i

Задача о постановке min комиссий за обмен валюты

$\epsilon > 0$

$$\forall (i_1, \dots, i_k)$$

$$a_{i_1 i_2} \cdot a_{i_2 i_3} \cdot \dots \cdot a_{i_k i_1} \leq \epsilon^k$$

min число: число Фроб. - Перрона
в идеалот. секторе

$$\sum_{k=1}^n C_n^k k!$$

когда много валют,
то перебираем (порядок)
валют

Кол-во требуемых операций: n^3

$$x = (x_1, \dots, x_n) > 0$$

спектральные: a_{ij} $j \rightarrow \text{евро}$

$$\max_j a_{ij} \cdot x_j \leq x_i \quad i = \overline{1, n} \iff \max_{1 \leq j \leq n} a_{ij} \cdot x_j \leq x_i \quad i = \overline{1, n}$$

Теорема 7 (Аффинат-Верман)

$\exists A = \|a_{ij}\|_{i,j=1, \dots, n} > 0$. Тогда следующие утверждения

эквивалентны:

1. A продуктивна в идемпотентном смысле
(т.е. $\exists x > 0: A \otimes x \neq \vec{0}$)
2. A не допускает арбитражной цепочки

$$1 \Rightarrow 2$$

$$\exists x = (x_1, \dots, x_n) > 0$$

$$a_{ij} x_j \leq x_i \quad i, j = \overline{1, n}$$

$$(i_1, i_2, \dots, i_k)$$

$$a_{i_1 i_2} \cdot x_{i_1} \leq x_{i_2}$$

$$a_{i_2 i_3} \cdot x_{i_2} \leq x_{i_3}$$

$$a_{i_{k-1}i_k} x_{i_k} \leq x_{i_{k-1}}$$

$$a_{i_k i_1} \cdot x_{i_1} \leq x_{i_k}$$

$$(a_{i_1 i_2} \cdot a_{i_2 i_3} \cdot \dots \cdot a_{i_{k-1} i_k} \cdot a_{i_k i_1}) \prod_{j=1}^k x_{i_j} \leq \prod_{j=1}^k x_{i_j}$$

$$\Rightarrow \boxed{a_{i_1 i_2} \cdot a_{i_2 i_3} \cdot \dots \cdot a_{i_{k-1} i_k} \cdot a_{i_k i_1} \leq 1.}$$

2 $\Rightarrow$ 1

$$(i, i_1, \dots, i_k, j) \quad a_{i i_1} \cdot a_{i_1 i_2} \cdot \dots \cdot a_{i_{k-1} i_k} \cdot a_{i_k j}$$

$$\hat{a}_{ij} = \sup \{ a_{i i_1} \cdot a_{i_1 i_2} \cdot \dots \cdot a_{i_{k-1} i_k} \cdot a_{i_k j} \}$$

$$a_{j_1 j_2} a_{j_2 j_3} \cdot \dots \cdot a_{j_t j_1} > 1, \text{ то:}$$

$$a_{ij} \cdot (a_{j_1 j_2} \cdot \dots \cdot a_{j_t j_1})^m a_{j_1 j}$$

$$a_{ij} = +\infty$$

Если арбитражных циклов нет, то

$$\hat{a}_{ij} < +\infty \quad i, j = 1, n$$

$$A = \|\hat{a}_{ij}\|_{i, j=1, n}$$

$$x_i = \max_j \hat{a}_{ij} = \sup_{\substack{k \geq 0 \\ (i_1, \dots, i_k)}} (a_{i i_1} \cdot a_{i_1 i_2} \cdot \dots \cdot a_{i_{k-1} i_k})$$

$$x_i = \sup_{j, i_1, \dots, i_k} (a_{ij} \cdot \underbrace{a_{j i_1}}_{\text{цикл}} \cdot a_{i_1 i_2} \cdot \dots \cdot a_{i_{k-1} i_k}) \geq a_{ij} x_j$$

Замечание: цикл-е. $A \cdot A \cdot \dots$ сходится

$$\hat{A} = A \oplus A \oplus A \oplus \dots \oplus A \oplus \dots$$

Кол-во операций: n^3

алгоритм Варшавы - Флойда

2.3

① Является ли неотрицательная матрица

$$\begin{pmatrix} 0 & 1.1 & 0 \\ 0.9 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 \end{pmatrix}$$

а) продуктивной, б) неразложимой, в) устойчивой?

Опр. Неотриц. м-ца - продуктивная, если $\exists \vec{x} \geq 0$:

$$\vec{w} = \vec{x} - A\vec{x} > 0$$

$$\vec{x} - A\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1.1 & 0 \\ 0.9 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1.1x_2 \\ 0.9x_1 \\ 0.5x_3 \end{pmatrix} \stackrel{?}{>} 0$$

$$\begin{cases} x_1 - 1.1x_2 > 0 \\ x_2 - 0.9x_1 > 0 \\ x_3 - 0.5x_3 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 > 1.1x_2 \\ -0.9x_1 > -x_2 \\ x_3 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 > 1.1x_2 \\ x_1 < \frac{1}{0.9}x_2 \\ x_3 > 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 1.1x_2 < x_1 < \frac{1}{0.9}x_2 \\ x_3 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{11}{10}x_2 < x_1 < \frac{10}{9}x_2 \\ x_3 > 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{99}{90}x_2 < x_1 < \frac{100}{90}x_2 \\ x_3 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{990}{900}x_2 < x_1 < \frac{1000}{900}x_2 \\ x_3 > 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\exists \vec{x}_* = \begin{pmatrix} \frac{995}{900} \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

т.к. $\lambda(A) = \frac{3\sqrt{11}}{10} < 1 \Rightarrow$
м-ца продуктивна

Проверка:

$$1) \frac{995}{900} - \frac{1.1}{10} = \frac{995 - 990}{900} > 0 \Rightarrow \checkmark$$

$$2) 1 - \frac{9}{10} \cdot \frac{995}{900} = 1 - \frac{995}{1000} > 0 \Rightarrow \checkmark$$

$$3) 1 - 0.5 > 0 \Rightarrow \checkmark$$

Т.о. матрица A продуктивна $\Rightarrow$ [а) да] $\checkmark$

Опр. М-ца A разложимая, если $\exists$ собств. подмно-во J элементов $N = \{1, \dots, n\}$ номеров строк этой м-цы:

$$a_{ij} = 0 \quad i \notin J, j \in J$$

Множество N в нашем случае: $N = \{1, 2, 3\}$

Возьмем подмножество J след-м образом: $J = \{3\}$

являются ли эл-ы $a_{13}, a_{23} = 0$? Да. Поэтому, м-ча

А яв-я разложимой $\Rightarrow$ В) нет ✓

Опр. Матрица А яв-я уст-й, если $\exists k \geq 0: A^k > 0$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1.1 & 0 \\ 0.9 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1.1 & 0 \\ 0.9 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0+1.1 \cdot 0.9+0 & 0+0+0 & 0+0+0 \\ 0+0+0 & 0.9 \cdot 1.1+0+0 & 0+0+0 \\ 0+0+0 & 0+0+0 & 0+0+0.25 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.99 & 0 & 0 \\ 0 & 0.99 & 0 \\ 0 & 0 & 0.25 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 1.1 & 0 \\ 0.9 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.99 & 0 & 0 \\ 0 & 0.99 & 0 \\ 0 & 0 & 0.25 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1.089 & 0 \\ 0.891 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.125 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \nexists k \geq 0: A^k > 0 \Rightarrow$ В) нет ✓

② Найти в терминах двойственной задачи необходимые и достаточные условия несовместности линейной системы.

$$A_1 x \leq b$$

$$A_2 x + A_3 y = 0$$

$$y \geq 0$$

$$b \in \mathbb{R}^{m_1}$$

$$A_1^{m_1 \times n}, A_2^{m_2 \times n}, A_3^{m_2 \times k}$$

Опр. Несовместные линейные с-ы - СЛУ, не имеющие ни 1 решения

Задача 17: $\begin{cases} 0x + 0y \rightarrow \max \\ A_1 x \leq b \\ A_2 x + A_3 y = 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$

Система несовместна $\Leftrightarrow$ не имеет решений задача 17

Двойственная задача:

$$\text{Матрица коэф-в: } C = \begin{pmatrix} A_1^T & 0 \\ A_2^T & A_3^T \end{pmatrix} \Rightarrow C^T = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ 0 & A_3 \end{pmatrix}$$

Т.к. $y \geq 0$, то 2-е в оп-х д.з. - мер-во, 1-е - рав-во.

Т.к. 1-е соот-е - мер-во $\Rightarrow u_1 \geq 0$, 2-е соот-е - рав-во $\Rightarrow u_2 + u_3 = 0$

Тогда д.з. а: $\begin{cases} bu_1 + 0 \cdot u_2 \rightarrow \min \\ A_1^T u_1 + A_2^T u_2 = 0 \\ A_3^T u_2 + 0 \cdot u_3 \geq 0 \\ u_1 \geq 0 \end{cases}$ ✓ $bu_1 \leq -1 < 0$

С-я с-а несовместна $\Leftrightarrow$ совместна двойственная система в задаче ✓